Concours en Mathématiques Physique
Correction de l'Epreuve de Mathématiques II

Exercice

1)

$x \mapsto P(x)Q(x)(1-x^2)^\alpha$ est continue sur $]-1,1[$ et en plus, il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ |P(x)Q(x)(1-x^2)^\alpha| \leq c(1-x^2)^\alpha$$

or

$$(1-x^2)^\alpha \sim 2^\alpha(1-x)^\alpha \text{ quand } x \longrightarrow 1$$

$$(1-x^2)^\alpha \sim 2^\alpha(1+x)^\alpha \text{ quand } x \longrightarrow -1$$

donc $(1-x^2)^\alpha$ est intégrable sur $]-1,1[$ pour tout $\alpha > -1$ d'où $x \mapsto P(x)Q(x)(1-x^2)^\alpha$ est intégrable sur $]-1,1[$.

2)

$$(P,Q)_\alpha = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)(1-x^2)^\alpha dx = \int_{-1}^{1} Q(x)P(x)(1-x^2)^\alpha dx = (Q,P)_\alpha$$

$$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q)_\alpha = \int_{-1}^{1} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)Q(x)(1-x^2)^\alpha dx = \lambda_1(P_1,Q)_\alpha + \lambda_2(P_2,Q)_\alpha$$

$$(P,P)_\alpha = \int_{-1}^{1} P(x)P(x)(1-x^2)^\alpha dx \geq 0.$$

$$(P,P)_\alpha = 0 \Longrightarrow P = 0 \text{ sur }]-1,1[\text{ d'où } P \text{ est le polynôme nul .}$$

Ainsi $(,)_\alpha$ est un produit scalaire.

3)

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}((1-x^2)^{\alpha+n}) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\alpha+n})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^k}{\partial x^k}((1-x)^{\alpha+n}) \frac{\partial^{n-k}}{\partial x^{n-k}}((1+x)^{\alpha+n})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k(\alpha+n)...(\alpha+n-k+1)(\alpha+n)...(\alpha+k+1)(-1)^k(1-x)^{\alpha+n-k}(1+x)^{\alpha+k}$$

$$= (1-x^2)^\alpha J_n^\alpha(x)$$

où

$$J_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(\alpha+n)...(\alpha+n-k+1)(\alpha+n)...(\alpha+k+1)(-1)^k(1-x)^{n-k}(1+x)^k$$

est un polynôme de degré n.

4)

$$(J_n^\alpha, J_m^\alpha)_\alpha = \int_{-1}^{1} J_n^\alpha(x) J_m^\alpha(x)(1-x^2)^\alpha dx$$

on a $n \neq m$, supposons que $n < m$.

$$(J_n^\alpha, J_m^\alpha)_\alpha = \int_{-1}^{1} J_n^\alpha(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m}((1-x^2)^{\alpha+m})dx$$

après une intégration par parties on trouve :

$$(J_n^\alpha, J_m^\alpha)_\alpha = -\int_{-1}^{1} (J_n^\alpha)'(x) \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}((1-x^2)^{\alpha+m})dx$$

et après n intégrations par parties on trouve :

$$\begin{aligned}(J_n^\alpha, J_m^\alpha)_\alpha &= (-1)^n \int_{-1}^{1} (J_n^\alpha)^{(n)}(x) \frac{\partial^{m-n}}{\partial x^{m-n}}((1-x^2)^{\alpha+m})dx \\ &= (-1)^n (J_n^\alpha)^{(n)} \int_{-1}^{1} \frac{\partial^{m-n}}{\partial x^{m-n}}((1-x^2)^{\alpha+m})dx = 0\end{aligned}$$

5) a)

$$J_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\alpha+n)...(\alpha+n-k+1)(\alpha+n)...(\alpha+k+1)(-1)^k(1-x)^{n-k}(1+x)^k$$

$\Longrightarrow J_n^\alpha(1) = (\alpha+n)....(\alpha+1)(-1)^n 2^n.$

5) b)

$$J_n^\alpha(x) = (1-x^2)^{-\alpha} \frac{\partial^n}{\partial x^n}((1-x^2)^{\alpha+n})$$

$x \mapsto (1-x^2)^{-\alpha}$ est paire et $x \mapsto \dfrac{\partial^n}{\partial x^n}((1-x^2)^{\alpha+n})$ est la dérivée n^{ieme} d'une fonction paire donc elle a la parité de n
d'où $J_n^\alpha(-x) = (-1)^n J_n^\alpha(x)$.

5) c)

$$J_n^\alpha(-1) = (-1)^n J_n^\alpha(1) = (\alpha+n)....(\alpha+1)2^n$$

6) a)

$\mathcal{A}_\alpha$ est linèaire et

$$\mathcal{A}_\alpha(P)(x) = -(1-x^2)^{-\alpha}(-2x(\alpha+1)(1-x^2)^\alpha \frac{\partial P}{\partial x} + (1-x^2)^{\alpha+1}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2})$$

$$= 2x(1+\alpha)\frac{\partial P}{\partial x} - (1-x^2)\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Ainsi, si P est un polynôme de degré $\leq N$, alors il en est de même pour $\mathcal{A}_\alpha(P)$.
d'où $\mathcal{A}_\alpha$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.

6) b)

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}_\alpha(P), Q)_\alpha &= -\int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial x}((1-x^2)^{\alpha+1}\frac{\partial P}{\partial x})Q(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\alpha+1}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x}(x)dx \\
&= -\int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial x}((1-x^2)^{\alpha+1}\frac{\partial Q}{\partial x})P(x)dx \\
&= (\mathcal{A}_\alpha(Q), P)_\alpha.
\end{aligned}
$$

7) a)

$$\mathcal{A}_\alpha(P) = \lambda P$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2x(1+\alpha)\frac{\partial P}{\partial x} - (1-x^2)\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \lambda P$$

D'où P vérifit l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - 2(1+\alpha)xy' + \lambda y = 0$$

7) b)

Soient $n \in \{0, 1..., N\}$ et $\lambda_n^\alpha = n(n-1)+2(\alpha+1)n$. Montrons qu'il existe $\Phi \in (\mathbb{R}_N[X])^*$ tel que $\mathcal{A}_\alpha \Phi = \lambda_n^\alpha \Phi$.
Cherchons Φ sous la forme $\Phi(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ avec $m \in \{0, 1..., N\}$.
Φ vérifit l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - 2(1+\alpha)xy' + \lambda_n^\alpha y = 0$$

ceci donne :

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} = (k(k-1) + 2(\alpha+1)k - \lambda_n^\alpha)a_k \text{ pour } 0 \leq k \leq m-2$$

$$(-(m-1)(m-2) - 2(\alpha+1)(m-1) + \lambda_n \alpha)a_{m-1} = 0$$

$$(-m(m-1) - 2(\alpha+1)m + \lambda_n^\alpha)a_m = 0$$

On choisit $m = n$, ceci impose $a_{n-1} = 0$.
d'où

si n est paire, on prend $a_1 = 0$ et $a_0 \neq 0$ et la relation de récurrence fournit un élément $\Phi \in I\!R_N[X]$ non nul tel que $\mathcal{A}_\alpha \Phi = \lambda_n^\alpha \Phi$.
si n est impaire, on prend $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$ et la relation de récurrence fournit un élément $\Phi \in I\!R_N[X]$ non nul tel que $\mathcal{A}_\alpha \Phi = \lambda_n^\alpha \Phi$.
d'où λ_n^α est une valeur propre de $\mathcal{A}_\alpha$.

8)

Remarquons que

$$J_n^0(x) = n! \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (-1)^k (1-x)^{n-k} (1+x)^{n+k}$$

et

$$\mathcal{A}_0(J_n^0) = -\frac{\partial}{\partial x}((1-x^2)\frac{\partial J_n^0}{\partial x})$$

un calcul directe donne

$$\mathcal{A}_0(J_n^0) = (n^2+n) J_n^0 = \lambda_n^0 J_n^0$$

d'où J_n^0 est le vecteur propre associé à la valeur propre λ_n^0.

Problème

Partie I

1) a)

Posons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$${}^tVU = u_1v_1 + ... + u_nv_n \text{ et } A = U\,{}^tV = (u_iv_j)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(I\!R)$$

${}^tVU \neq 0 \Longrightarrow$ il existe i tel que $u_iv_i \neq 0 \Longrightarrow A \neq 0$ et un mineur d'ordre 2 de A est du type $\begin{vmatrix} u_iv_j & u_iv_k \\ u_lv_j & u_lv_k \end{vmatrix} = 0$ donc $\mathrm{rg}(A) = 1$.

1) b) i)

$\mathrm{rg}(A) = 1 \Longrightarrow$ il existe $U \neq 0$ tel que $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(I\!R)$, $AX \in$ Vect (U)
$\Longrightarrow$
$\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(I\!R)$ il existe $\alpha_X \in I\!R$ tel que $AX = \alpha_X U$.

1) b) ii)

$$\text{i}^{eme}\text{ligne} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = E_i \ , \ AE_i = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}e_{j1} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}e_{j2} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}e_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = A_i$$

$A_i = AE_i \Longrightarrow$ il existe α_i tel que $A_i = AE_i = \alpha_i U$.

1) b) iii)

$$V = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$U\,{}^tV = (u_i\alpha_j)_{1\leq i,j\leq n} = A \text{ et } {}^tVU = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = \text{ tr } (A) \neq 0.$$

1) c)

à partir de a) et b) on a l'équivalence : $A \in \mathcal{M}_n(I\!R)$ de trace non nulle est de rang 1 si et seulement s' il existe U et V tel que ${}^tVU \neq 0$ et $A = U\,{}^tV$.

2)

$U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(I\!R)$ tel que ${}^tVU \neq 0$.

2) a)

$$\Psi(\alpha X + Y) = {}^tV(\alpha X + Y) = \alpha\,{}^tVX + {}^tVY = \alpha\Psi(X) + \Psi(Y)$$

donc Ψ est linéaire.

2) b)

$$L = \ker(\Psi)$$

Ψ est une forme linéaire non nulle, car $\Psi(U) \neq 0$, donc $\dim(\ker\Psi) = \dim(L) = n-1$.

2) c)

On a ${}^tVU \neq 0 \Longrightarrow U \notin L$.
$\forall X \in L$, $AX = U\,{}^tVX$, or ${}^tVX = 0 \Longrightarrow AX = 0$.

2) d)

$$AU = U\,{}^tVU = {}^tVUU$$

$\Longrightarrow$

U est un vecteur propre associé à la valeur propre ${}^tVU$.

2) e)

On a $\forall\ X \in L$, $AX = 0$ et $AU = {}^tVUU$ $Sp(A) - n$

$\Longrightarrow$ ${}^tVU \neq 0$ $\dim m = n - 1$

Sp(A) = $\{0,\ {}^tVU\}$ avec 0 est une valeur propre de multiplicité $n-1$ et ${}^tVU$ est une valeur propre simple. $\dim m_\lambda = 1$

A est alors diagonalisable et semblable à la matrice D et il existe P inversible tel que $A = P^{-1}DP$.

2) f)

$$\det(I + A) = \det(I + P^{-1}DP) = \det(P^{-1}(I + D)P) = \det(I + D) = 1 + {}^tVU.$$

2) g)

L'inverse de $I + A$ existe si et seulement si $1 + {}^tVU \neq 0$.
En remarquant que $A^2 = {}^tVUA$, on a :

$$(I + A)(I + \alpha A) = (I + \alpha A)(I + A) = I \Longleftrightarrow \alpha = \frac{-1}{1 + {}^tVU}.$$

Partie II

Question préliminaire

Soient $A \in \mathcal{S}$ et X, $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(I\!R)$ tels que ${}^tXX = {}^tYY = 1$ et ${}^tXY = 0$.

$${}^tXAY = {}^tX\,{}^tAY = {}^t({}^tYAX)$$

or ${}^tYAX \in I\!R \Longrightarrow {}^t({}^tYAX) = {}^tYAX$, d'où ${}^tXAY = {}^tYAX$.

$\Longrightarrow$ et

$$\mathcal{S} \subset \{A \in \mathcal{M}_n(I\!R) \text{ tel que } {}^tXAY = {}^tYAX\ ,\ \forall\ X, Y \in \mathcal{M}_n(I\!R)$$
$$\text{vérifiants } {}^tXX = {}^tYY = 1 \text{ et } {}^tXY = 0\}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(I\!R)$ telle que :

$${}^tXAY = {}^tYAX\ ,\ \forall\ X, Y \in \mathcal{M}_n(I\!R) \text{ vérifiants } {}^tXX = {}^tYY = 1 \text{ et } {}^tXY = 0$$

Choisissons

$$\text{i}^{eme}\text{ligne} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = X \text{ et } \quad \text{j}^{eme}\text{ligne} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = Y \text{ avec } i \neq j$$

on a

$${}^tXX = {}^tYY = 1 \text{ et } {}^tXY = 0.$$

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, alors ${}^tX\underbrace{AY}_{A_j} = a_{i,j}$ et ${}^tY\underbrace{AX}_{A_i} = a_{j,i}$.
Ainsi, pour tout i, j tel que $i \neq j$ on a $a_{i,j} = a_{j,i}$, d'où ${}^tA = A$.
Conclusion :

${}^tXA_j = a_{ij}$

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } {}^tXAY = {}^tYAX \text{ , } \forall\ X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$\text{vérifiants } {}^tXX = {}^tYY = 1 \text{ et } {}^tXY = 0\}$$

A)

1)

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}({}^t(AB))$

On a :
$* \ \langle A, B \rangle = \ \mathrm{tr}\ (A\ {}^tB) = \ \mathrm{tr}\ (B\ {}^tA) = \langle B, A \rangle$
$* \ \langle \alpha A_1 + A_2, B \rangle = \ \mathrm{tr}\ ((\alpha A_1 + A_2)\ {}^tB) = \alpha \ \mathrm{tr}\ (A_1\ {}^tB) + \ \mathrm{tr}\ (A_2\ {}^tB) = \alpha \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle$
$* \ \langle A, A \rangle = \ \mathrm{tr}\ (A\ {}^tA)$
On prend $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$,

$$A\ {}^tA = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ tel que } c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{j,k}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{tr}\ (A\ {}^tA) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_{i,k})^2 \geq 0$$

$\Longrightarrow \langle A, A \rangle \geq 0.$
$* \ \langle A, A \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_{i,k})^2 = 0 \iff$

$$a_{i,k} = 0 \text{ , } \forall\ i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ et } k \in \{1, 2, ..., n\} \iff A = 0$$

d'où $\langle , \rangle$ est un produit scalaire.

2) a)

$A \in \mathcal{S}^+ \Longrightarrow A$ est semblable à une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_i \geq 0.$$

$\Longrightarrow$

$$\text{tr }(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \text{ et } \text{tr }(A^2) = (\lambda_1)^2 + \ldots + (\lambda_n)^2.$$

$$\|A\|^2 = \langle A, A\rangle = \text{ tr }(A\,{}^tA) = \text{ tr }(A^2) = (\lambda_1)^2 + \ldots + (\lambda_n)^2 \leq (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)^2$$

$\Longrightarrow$

$$\|A\|^2 \leq (\text{ tr }(A))^2.$$

2) b)

$$\|A\|^2 = \langle A, A\rangle = \text{ tr }(A\,{}^tA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j})^2 = \sum_{i,j=1}^{n}(a_{i,j})^2.$$

2) c)

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}},\ B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}},\ AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}},\ \text{avec } c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}.$$

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n}(c_{i,j})^2 = \sum_{i,j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j})^2$$

or

$$(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j})^2 \leq (\sum_{k=1}^{n}(a_{i,k})^2)(\sum_{k=1}^{n}(b_{k,j})^2)$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\|AB\|^2 &\leq \sum_{i,j=1}^{n}((\sum_{k=1}^{n}(a_{i,k})^2)(\sum_{k=1}^{n}(b_{k,j})^2)) \\ &\leq (\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}(a_{i,k})^2))(\sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}(b_{k,j})^2)) \\ &\leq \|A\|^2\|B\|^2.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

3)

$$\|U\,{}^tV\|^2 = \langle U\,{}^tV, U\,{}^tV\rangle = \text{ tr } (U\,{}^tV\;V\,{}^tU) = V\,{}^tV \text{ tr } (U\,{}^tU) = U\,{}^tU\;V\,{}^tV.$$

$\Longrightarrow$

$$\|U\,{}^tV\| = \sqrt{{}^tVV}\sqrt{{}^tUU}.$$

4)

$$\langle A, B\rangle = \text{ tr } (A\,{}^tB) = -\text{ tr } (AB)$$
$$\langle B, A\rangle = \text{ tr } (B\,{}^tA) = \text{ tr } (BA) = \text{ tr } (AB)$$
$$\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle \Longrightarrow \text{ tr } (AB) = -\text{ tr } (AB)$$

d'où

$$\text{tr } (AB) = 0 \text{ et } \langle A, B\rangle = 0.$$

B)

1)

On note que :

$$(X\,{}^tX + Y\,{}^tY)(X\,{}^tX + Y\,{}^tY) = X\,{}^tX + Y\,{}^tY$$

$$(X\,{}^tY - Y\,{}^tX)(X\,{}^tY - Y\,{}^tX) = -X\,{}^tX - Y\,{}^tY$$
$$(X\,{}^tX + Y\,{}^tY)(X\,{}^tY - Y\,{}^tX) = X\,{}^tY - Y\,{}^tX$$
$$(X\,{}^tY - Y\,{}^tX)(X\,{}^tX + Y\,{}^tY) = X\,{}^tY - Y\,{}^tX.$$

Puis un calcul direct de $Q(\alpha)Q(-\alpha)$ donne le résultat.

2)

$*\ {}^tQ(\alpha) = I - 2\sin^2\alpha(X\,{}^tX + Y\,{}^tY) + 2\sin\alpha\cos\alpha(Y\,{}^tX - X\,{}^tY) = Q(-\alpha).$
$Q(\alpha)Q(-\alpha) = I \Longrightarrow Q(\alpha)\,{}^tQ(\alpha) = I \Longrightarrow Q(\alpha) \in \mathcal{O}(n).$

$*\ {}^tPP = (I - 2X\,{}^tX)(I - 2X\,{}^tX = I - 4X\,{}^tX + 4X\,{}^tXX\,{}^tX$
or ${}^tXX = 1 \Longrightarrow {}^tPP = I \Longrightarrow P \in \mathcal{O}(n).$

3) a)

$$\langle A, V\,{}^tZ\rangle = \text{ tr } (AZ\,{}^tV) = {}^tVAZ.$$

3) b)

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ Q(\alpha) \in \mathcal{O}(n) \Longrightarrow \langle A, Q(\alpha)\rangle \leq \langle A, I\rangle \Longrightarrow \langle A, Q(\alpha) - I\rangle \leq 0$$

d'où

$$-2\sin^2\alpha\langle A, X\,{}^tX + Y\,{}^tY\rangle + 2\sin\alpha\cos\alpha\langle A, X\,{}^tY - Y\,{}^tX\rangle \leq 0$$

$\Longrightarrow$

$$-2\sin^2\alpha(\,{}^tXAX + \,{}^tYAY) + 2\sin\alpha\cos\alpha(\,{}^tXAY - \,{}^tYAX) \leq 0$$

3) c)

$\forall\ \alpha \in]0, \pi[$,

$$-(\,{}^tXAX + \,{}^tYAY) + \text{cotg}\alpha(\,{}^tXAY - \,{}^tYAX) \leq 0$$

si cotg $\alpha \geq$ ...

cotg α $({}^tXAY - {}^tYAX) \leq \dfrac{{}^tXAX + {}^tYAY}{\text{cotg}\alpha}$

Puisque cotg α décrit $\mathbb{R}$ quand α décrit $]0, \pi[$, on a nécessairement

$${}^tXAY - \,{}^tYAX = 0.$$

Ainsi on a : $\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que ${}^tXX = \,{}^tYY = 1$ et ${}^tXY = 0$,

$${}^tXAY = \,{}^tYAX$$

d'où $A \in \mathcal{S}$.

3) d)

$$P \in \mathcal{O}(n) \Longrightarrow \langle A, P\rangle \leq \langle A, I\rangle \Longrightarrow \langle A, P - I\rangle \leq 0.$$

$$\langle A, P - I\rangle \leq 0 \Longrightarrow -2\langle A,\ {}^tXX\rangle \leq 0 \Longrightarrow\ {}^tXAX \geq 0$$

d'où $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tXX = 1$, on a ${}^tXAX \geq 0$

$\Longrightarrow$

$$\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ ,\ {}^tXAX \geq 0$$

et comme $A \in \mathcal{S}$, on obtient $A \in \mathcal{S}^+$.

4) a)

$$\begin{aligned} -\,{}^t(\Omega - I)(\Omega - I) &= -(\,{}^t\Omega - I)(\Omega - I) \\ &= -\,{}^t\Omega\Omega + \,{}^t\Omega + \Omega - I \\ &= \Omega + \,{}^t\Omega - 2I. \end{aligned}$$

4) b)

$$2C = \Omega + {}^t\Omega - 2I$$
$$2\langle A, C\rangle = \langle A, 2C\rangle = \langle A, \Omega + {}^t\Omega - 2I\rangle$$
$$= \langle A, \Omega - I\rangle + \langle A, {}^t\Omega - I\rangle = \langle A, \Omega - I\rangle + \text{ tr } (A(\omega - I))$$
$$= \langle A, \Omega - I\rangle + \text{ tr } ((\Omega - I)\,{}^tA) = \langle A, \Omega - I\rangle + \langle \Omega - I, A\rangle$$
$$= 2\langle A, \Omega - I\rangle$$

$\Longrightarrow$

$$\langle A, C\rangle = \langle A, \Omega - I\rangle$$

$\Longrightarrow$

$$2\langle A, \Omega - I\rangle = \langle A, 2C\rangle = -\langle A, -\,{}^t(\Omega - I)(\Omega - I)\rangle =$$
$$-\text{ tr } (A^t(\Omega - I)(\Omega - I)) = -\text{ tr } ((\Omega - I)A\,{}^t(\Omega - I))$$

4) c)

$* \, {}^t((\Omega - I)A\,{}^t(\Omega - I)) = (\Omega - I)\,{}^tA\,{}^t(\Omega - I) = (\Omega - I)A\,{}^t(\Omega - I)$

$\Longrightarrow$

$$(\Omega - I)A\,{}^t(\Omega - I) \in \mathcal{S}.$$

$* \, {}^tX(\Omega - I)A\,{}^t(\Omega - I)X = {}^t(\,{}^t(\Omega - I)X)A(\,{}^t(\Omega - I)X) \geq 0$

$\Longrightarrow$

$$(\Omega - I)A\,{}^t(\Omega - I) \in \mathcal{S}^+.$$

${}^tXAX \geq 0$

$M_{n,1}(\mathbb{R})$

4) d)

$(\Omega - I)A\,{}^t(\Omega - I) \in \mathcal{S}^+$

$\Longrightarrow$

$\text{tr } ((\Omega - I)A\,{}^t(\Omega - I)) \geq 0$

$\Longrightarrow$

$\langle A, \Omega - I\rangle \leq 0$

$\Longrightarrow$

$\langle A, \Omega\rangle \leq \langle A, I\rangle.$

5)

La question 4) $\Longrightarrow$

$$\mathcal{S}^+ \subset \bigcap_{\Omega \in \mathcal{O}(n)} \{A \in \mathcal{M}_n(I\!R) \text{ tel que } \langle A, \Omega\rangle \leq \langle A, I\rangle\}$$

La question 3) $\Longrightarrow$

$$\bigcap_{\Omega \in \mathcal{O}(n)} \{A \in \mathcal{M}_n(I\!R) \text{ tel que } \langle A, \Omega\rangle \leq \langle A, I\rangle\} \subset \mathcal{S}^+$$

d'où l'égalité.

6) a)

Ψ est linéaire sur des espaces de dimension finie, donc Ψ est continue.

6) b)

$$\{A \in \mathcal{M}_n(I\!R) \text{ tel que } \langle A, \Omega\rangle \leq \langle A, I\rangle\} = \Psi^{-1}(]-\infty, 0])$$

c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc c'est un fermé.

6) c)

$\mathcal{S}^+$ est l'intersection de fermés donc c'est un fermé.

6) d)

Soit $A \neq 0$, $A \in \mathcal{S}^+$. $\forall t \in I\!R^+$, $tA \in \mathcal{S}^+$ et

$$\|tA\| = t\|A\| \longrightarrow +\infty \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

$\Longrightarrow$
$\mathcal{S}^+$ est non borné
$\Longrightarrow$
$\mathcal{S}^+$ est non compact.